

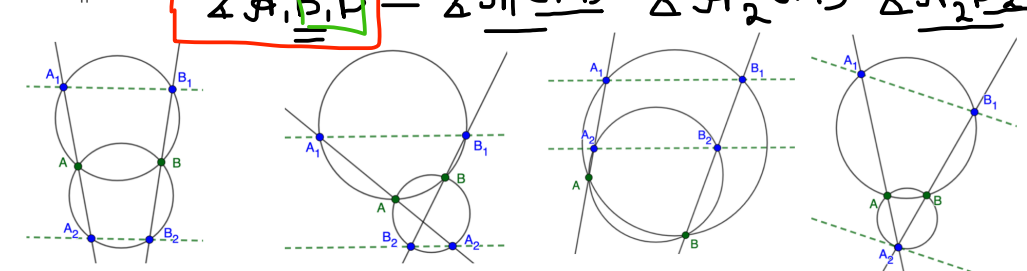
$\Delta XYZ = 2d$
Занятия Яндекс
 $\sin d$
О серединах высот
4 марта

Направленный угол между прямыми a и b — это угол, на который нужно повернуть прямую a , чтобы она совпала с прямой b (или стала параллельна ей). Обозначение: $\angle(a, b)$. Направленный угол положителен, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и отрицателен в противном случае. Направленные углы, отличающиеся на π , считаются равными; таким образом, удобно полагать, что направленный угол принимает значения в промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, а сложение направленных углов производится по модулю π . Пусть a, b, c и d — четыре прямые, $A = a \cap d, B = b \cap a, C = c \cap b$ и $D = c \cap d$.

C1. $\angle(a, b) + \angle(b, c) + \angle(c, a) = 0$

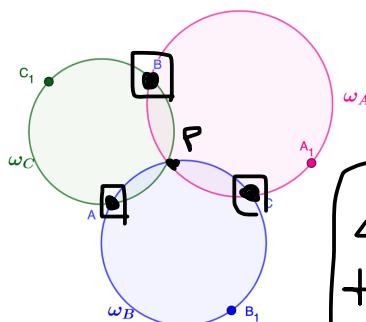
C2. A, B, C и D лежат на одной окружности $\iff \angle(AB, BC) \equiv \angle(AD, DC)$.

Лемма Фусса. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Точки A_1 и B_1 выбираются на ω_1 , а точки A_2 и B_2 на ω_2 , так что $A \in A_1A_2$ и $B \in B_1B_2$. Тогда $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

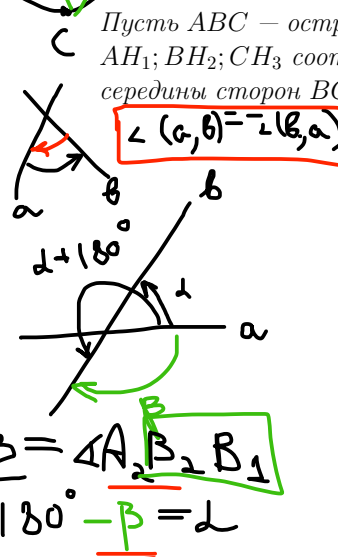
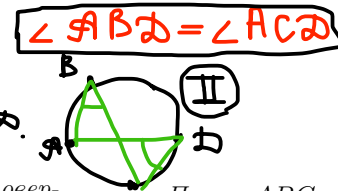


Важная лемма. Пусть даны три окружности ω_A, ω_B и ω_C притом, ω_A и ω_B пересекаются в C , ω_A и ω_C — в B , ω_B и ω_C — в A . Пусть $A_1 \in \omega, B_1 \in \omega_B$ и $C_1 \in \omega_C$. Окружности ω_A, ω_B и ω_C имеют общую точку тогда и только тогда, когда выполнено тождество:

$$\angle(BA_1, A_1C) + \angle(CB_1, B_1A) + \angle(AC_1, C_1B) = 0$$



$\angle(AP, PC)$
 $\angle APB + \angle BPC$
 $\angle AC, B + \angle B, A, C +$
 $+ \angle CB, A = 0$

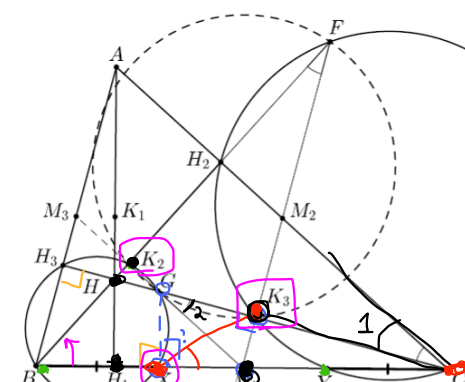


О серединах высот.

4 марта

Пусть ABC — остроугольный треугольник, точки $K_1; K_2; K_3$ — середины его высот $AH_1; BH_2; CH_3$ соответственно, H — ортоцентр, а $M_1; M_2; M_3$ — соответственно середины сторон $BC; CA; AB$.

$\angle(a, b) = -\angle(b, a)$



$CK_3 \perp$
 $K_2H_2 \perp AC$

$\angle XBK_2 + \angle K_2HK_3 + \angle K_3CX = 0$

Пусть описанные окружности треугольников BK_2H_3 и CH_2K_3 сторону BC в точках X и Y соответственно.

1. Пусть $M_3M_1 \cap CH_3 = G$ и $M_1M_2 \cap BH_2 = F$.

(a) Докажите, что $BH_3K_2G, K_2FK_3G, CK_3H_2F$ — вписанные четырехугольники.

(b) Докажите, что $BX = CY$.

2. Докажите, что (a) $K_1K_2HH_3$ — вписанный

(b) выразите $\angle K_1K_2H_3$ через углы треугольника ABC ;

(c) прямые XK_2 и YK_3 пересекаются в точке K_1

Обозначим окружность, описанную около треугольника BK_2Y через Ω_B , а окружность, описанную около треугольника CK_3X — Ω_C .

3. Докажите, что Ω_C касается прямой AC в точке C .

Пусть окружность, описанная около четырехугольника BH_3K_2X , пересекает Ω_C в точке P , а окружность, описанная около четырехугольника CH_2K_3Y , пересекает окружность Ω_B в точке Q .

4. Докажите, что точки P и Q принадлежат окружности, описанной около пятиугольника $HK_2K_3M_1H_1$

5. Докажите, что точки A, K_2, P лежат на одной прямой.

6. Пусть A' – точка симметричная точке A относительно H . Докажите, что точки B, H_1, P, A' лежат на одной окружности.

7. Пусть прямая $A'C$ второй раз пересечет окружность, описанную около треугольника BH_1A' в точке S . Докажите, что точка S принадлежит окружности Ω_C .

8. Докажите, что радикальной оси окружностей Ω_B и Ω_C принадлежит точка, симметричная ортоцентру H относительно точки O (центр описанной окружности).