

Неравенство Йенсена

1. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a + b + c = 36$. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{4a+1}} + \frac{1}{\sqrt{4b+1}} + \frac{1}{\sqrt{4c+1}}.$$

2. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ являются длинами сторон n -угольника периметра P . Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{P - 2a_1} + \frac{a_2}{P - 2a_2} + \dots + \frac{a_n}{P - 2a_n} \geq \frac{n}{n - 2}.$$

3. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leq \left(\frac{a}{c}\right)^a \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^b.$$

4. **Неравенство о средних с весами.** Даны положительные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, причём $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Докажите неравенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

5. Числа a, b, c являются длинами сторон треугольника. Докажите неравенство

$$a^2 b(a-b) + b^2 c(b-c) + c^2 a(c-a) \geq 0.$$

6. Для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ докажите неравенство

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + b_i^2}.$$