

Стереометрия

1) Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что на его ребрах можно расставить положительные числа так, чтобы для каждой грани сумма чисел, записанных на ее ребрах, была бы численно равна площади этой грани.

2) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

3) В треугольной пирамиде $ABCD$ на ее гранях BCD и ACD нашлись соответственно точки A' и B' такие, что углы $\angle AB'C$, $\angle AB'D$, $\angle BA'C$, $\angle BA'D$ равны 120 градусов. Известно, что прямые AA' и BB' пересекаются. Докажите, что точки A' и B' равноудалены от прямой CD .

4) Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)

5) Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A , B и C , а также касаются плоскости α в точках D , E и F . Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC , меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника DEF .

6) Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу Ω . Докажите, что сферы, симметричные Ω относительно прямых SA , SB , SC и плоскости ABC , имеют общую точку. Сфера, симметричная данной относительно прямой – это сфера такого же радиуса, центр которой симметричен центру исходной сферы относительно прямой.