

Многочлены в картинках

1. Устно докажите, что для различных a, b и c многочлен

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$$

всегда имеет 2 различных корня.

2. Пусть a, b, c таковы, что $c(a + b + c) < 0$. Докажите, что $b^2 - 4ac > 0$.
3. Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства $P(b + c) = P(a)$, $P(c + a) = P(b)$, $P(a + b) = P(c)$.
4. Многочлен $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(x^2 + 2x + 2021)$ действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2021) > 1$.
5. Многочлен $P(x)$ называется *милым*, если для любого целого x найдется натуральное k , не превосходящее 1000, такое, что $|P(x + k) - P(x)| < 10000$. Найдите все милые многочлены.
6. Ненулевые многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами удовлетворяют тождествам

$$P(x) + Q(x) + R(x) = P(Q(x)) + Q(R(x)) + R(P(x)) = 0.$$

Докажите, что степени всех трёх многочленов чётные.