

Асимптотика. Задачи

1. Докажите, что существует натуральное число, большее 10^{2025} , которое нельзя представить в виде суммы точного куба и точного квадрата.
2. Существует ли квадратный трёхчлен, все значения которого в натуральных точках — кубы целых чисел?
3. Двое игроков играют в игру, первый каждым своим ходом отмечает одну красную точку, а второй — 100 синих точек. Докажите, что первый за несколько ходов сможет построить правильный треугольник с вершинами в красных точках.
4. Докажите, что для любого натурального числа n существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы n слагаемых, каждое из которых является n -й степенью натурального числа.
5. Верно ли, что из любого числа можно получить точный квадрат, вставляя в его десятичную запись не более 10 цифр? Цифры можно вставлять в любые места.
6. Петя и Вася по очереди закрашивают клетки бесконечной клетчатой доски. За один ход Петя закрашивает 100 клеток в зеленый цвет, а Вася — 99 клеток в красный цвет. Перекрашивать клетки нельзя. Петя хочет нарисовать полностью зеленый квадрат 10×10 . Сможет ли Вася ему помешать?
7. Обозначим $\sigma(n)$ сумму цифр десятичной записи числа n . Докажите, что существует бесконечно много натуральных n , для которых выполнено неравенство $\sigma(3^{n+1}) \leq \sigma(3^n)$.