

- 1) В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что каждый город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими, и из каждого города можно попасть в любой другой, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее количество городов может быть в этом государстве?
- 2) Оказалось, что в группе по изучению французского языка для любых двух девочек есть ровно один мальчик, который нравится им обеим, и каждый мальчик нравится по крайней мере трем девочкам. Приведите пример такой группы, в которой учится больше одного мальчика.
- 3) В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A *доступен* для города B , если из B можно долететь в A , возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R , для которого и P , и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что город доступен для себя.)
- 4) Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в любую другую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).
- 5) В классе учатся 15 мальчиков и 15 девочек. В день 8 Марта некоторые мальчики позвонили некоторым девочкам и поздравили их с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке дважды). Оказалось, что детей можно единственным образом разбить на 15 пар так, чтобы в каждой паре оказались мальчик с девочкой, которой он звонил. Какое наибольшее число звонков могло быть сделано?
- 6) В математическом кружке 45 школьников, некоторые дружат. Как ни разбивай их на тройки, в какой-то тройке все будут друг с другом дружить. Докажите, что всех школьников можно разбить на тройки так, чтобы в каждой тройке хотя бы какие-то двое дружили друг с другом.
- 7) На собрание пришло n человек ($n > 1$). Оказалось, что у каждого двух из них среди собравшихся есть ровно двое общих знакомых. а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании. б) Покажите, что n может быть больше 4.
- 8) Раскраска вершин графа называется *правильной*, если вершины одного цвета не соединены ребром. Некоторый граф правильно раскрашен в k цветов, причём его нельзя правильно раскрасить в меньшее число цветов. Докажите, что в этом графе существует путь, вдоль которого встречаются вершины всех k цветов ровно по одному разу.
- 9) В Чикаго живут 36 гангстеров, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причём нет двух банд с совпадающим составом. Оказалось, что гангстеры, состоящие в одной банде,

не враждуют, но если гангстер не состоит в какой-то банде, то он враждует хотя бы с одним её участником. Какое наибольшее число банд могло быть в Чикаго?

- 10) В таблице $N \times N$, заполненной числами, все строки различны (две строки называются различными, если они отличаются хотя бы в одном элементе). Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.