

Неравенства. Задачи

1. (а) Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

(б) Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}.$$

2. (а) Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{a+b+c}.$$

(б) Для любых чисел $a, b, c > 0$ докажите неравенство

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1.$$

3. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + d^2} + \frac{d^3}{d^2 + a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2} + \frac{1}{1+b^2+(c+1)^2} + \frac{1}{1+c^2+(a+1)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

5. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что

$$\frac{1}{5-a} + \frac{1}{5-b} + \frac{1}{5-c} + \frac{1}{5-d} \leq 1.$$

6. Пусть a, b, c — положительные числа с суммой 1. Докажите, что

$$\frac{7+2b}{1+a} + \frac{7+2c}{1+b} + \frac{7+2a}{1+c} \geq \frac{69}{4}.$$