

Queue

В этом листочке дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC , его ортоцентр обозначен через H , центр описанной окружности Ω — через O , проведены высоты AH_a , BH_b и CH_c . Середины сторон AB , BC и CA обозначены как M_c , M_a и M_b соответственно. Точка Q_a основание перпендикуляра из точки A на луч M_aH .

1. Докажите, что

(а) M_aH_c — касательная к (AQ_aH) ;

(б) $Q_aH_cHH_b$ — гармонический четырехугольник.

Пусть AH вторично пересекает Ω в точке A_1 .

2. Докажите, что четырехугольники Q_aCA_1B и $Q_aH_bHH_c$ поворотно гомотетичны с центром в Q_a (то есть существуют некоторые гомотетия и поворот с центром в Q_a , композиция которых переводит один четырехугольник в другой).

Пусть касательные в точках B и C к окружности Ω пересекают прямую H_bH_c в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z .

3. Докажите, что Q_a , A_1 и Z лежат на одной прямой.

4. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются.

5. Пусть H'_b — точка симметричная H_b относительно AH_a . Докажите, что $H'_b \in (AH_bH_c)$, $H'_b \in H_aH_c$ и $H'_b \in BQ_a$.

6. Прямая ZA_1 пересекает BC в точке S . Прямая M_aH пересекает H_cH_b в точке T . Докажите, что

(а) $\angle BHS = \angle CHM_a$;

(б) $\frac{SA_1}{A_1Z} = \frac{TH}{HM_a}$ (подсказка: $BA_1C \sim H_cHH_b$);

(в) прямые ZH_a , M_aH и H_cH_b пересекаются в одной точке.

7. Докажите, что ZH_a , BQ_a и AC пересекаются в одной точке.