Конструктивы в алгебре и ТЧ

1. Существуют ли четыре попарно различных положительных числа a, b, c, d, при которых все четыре числа

$$\frac{a+b}{a-b}, \frac{b+c}{b-c}, \frac{c+d}{c-d}, \frac{d+a}{d-a}$$

целые?

2. Существуют ли 100 рациональных чисел таких, что произведение любых двух не является целым числом, а произведение любых трёх является целым?

3. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.

4. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 2025 в ряд так, что для любого $k = 1, 2, \ldots, 2025$ сумма первых k чисел в этом ряду нацело делится на k-е число в ряду?

5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных N таких, что каждое из чисел $N-2$, N и $N+6$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.

6. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x)$, что для любого натурального n уравнение $f(f(\ldots f(x))) = 0$ (n букв f) имеет ровно $2n$ различных действительных корней?

7. Дано натуральное число n. Докажите, что существуют n попарно взаимно простых натуральных чисел $k_0, k_1, \ldots, k_n > 1$, для которых число $k_0 k_1 \ldots k_n - 1$ равно произведению двух последовательных натуральных чисел.

8. *Радикал* $\mathrm{rad}(N)$ натурального числа N —— это произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $\mathrm{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C, что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot \mathrm{rad}(ABC)$?