

Комплексные числа в задачах

- (а) Найдите значение суммы $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots$

(б) Найдите значение суммы $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots$
- Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами принимает неотрицательные значения при любом $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что он представим в виде суммы квадратов двух многочленов Q, R с вещественными коэффициентами: $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.
- (а) При каких натуральных n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

(б) Докажите, что многочлен $x^{60} + x^{50} + \dots + x^{10} + 1$ делится на $x^6 + x^5 + \dots + x + 1$.
- Пусть $P_k(x) = x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1$, $Q_n(x) = P_1(x)P_2(x) \dots P_n(x)$. Докажите, что многочлен $Q_{n+m}(x)$ делится на $Q_n(x)Q_m(x)$.
- Дан правильный n -угольник, вписанный в окружность радиуса 1. Найдите сумму квадратов длин всех его сторон и диагоналей.
- Пусть $n > 3$ — натуральное число. Учитель написал на доске многочлены $x^{n-3}, x^n, x - x^{n+1}$. За один ход ученик может взять два (возможно, совпадающих) многочлена с доски и дописать на доску их сумму, разность или произведение.

(а) Докажите, что если n делится на 3, то такими действиями нельзя получить многочлен x .

(б) При каких n получить многочлен x можно?
- На плоскости отмечено несколько точек. Для любых трёх из них существует декартова система координат (то есть перпендикулярные оси и общий масштаб), в которой эти точки имеют целые координаты. Докажите, что существует декартова система координат, в которой все отмеченные точки имеют целые координаты.
- Можно ли отметить 2025 точек на единичной окружности так, чтобы все попарные расстояния между ними были рациональны?
- Найдите значение $\cos \frac{2\pi}{5}$.
- Вершины правильного n -угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.