

Клетчатая комбинаторика. Лекция.

Ключевые методы, которые помогают в решении клетчатой комбы:

- Раскраска
 - Оценки, подсчет 2 способами
 - Принцип крайнего
 - Индукция
 - Переход к графу
 - Переход к графу строк и столбцов
1. Грани куба $9 \times 9 \times 9$ разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками 2×1 (стороны полосок идут по сторонам клеток). Докажите, что число согнутых полосок нечётно.
 2. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят чёрные и белые фишки. С доски сначала снимаются все чёрные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся чёрных. Докажите, что либо чёрных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2 .
 3. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа расставить натуральные числа таким образом, чтобы при любых натуральных $m, n > 100$ сумма чисел в любом прямоугольнике $m \times n$ клеток делилась на $m + n$?
 4. Назовём расстоянием между двумя клетками клетчатой доски наименьшее количество ходов, за которое шахматный король может добраться от одной из них до другой. Найдите наибольшее количество клеток, которое можно отметить на доске 100×100 так, чтобы среди них не нашлось двух клеток, расстояние между которыми равно 15.
 5. В таблице 44×44 часть клеток синие, а остальные красные. Никакие синие клетки не граничат друг с другом по стороне. Множество красных клеток, наоборот, связано по сторонам (от любой красной клетки можно добраться до любой другой красной, переходя из клетки в клетку через общую сторону и не заходя в синие клетки). Докажите, что синих клеток в таблице меньше трети.
 6. Дано натуральное число $n \geq 2$. Рассмотрим все такие покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

Клетчатая комбинаторика. Семинар.

1. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.
2. В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы?
3. В каждой клетке таблицы 100×100 записано натуральное число. В каждой строке имеется по крайней мере 10 различных чисел, а в каждой четырех последовательных строках не более 15 различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в таблице?
4. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трёх клеток так, что каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекало одно и то же количество уголков?
5. Дана клетчатая доска 1000×1000 . Фигура гепард из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x , за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?
6. В каждой клетке квадрата 2012×2012 записано вещественное число от 0 до 1. Рассмотрим всевозможные разрезы этого квадрата на два прямоугольника по вертикальной или горизонтальной линии сетки. Оказалось, что какой бы разрез не был произведен, сумма чисел хотя бы в одном из двух получившихся прямоугольников не больше 1. Найдите максимально возможную сумму чисел в исходном квадрате.
7. Дана клетчатая таблица 100×100 , клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток?
8. В таблице $m \times n$ расставлены действительные числа так, что сумма чисел в каждом столбце и каждой строке целая. Докажите, что каждое число в таблице можно заменить на его верхнюю или нижнюю целую часть так, чтобы сумма чисел в каждом столбце и каждой строке не изменилась.