

Конспект занятия от 23 сентября

Последовательности

1 Арифметические и геометрические прогрессии

1.1 Основные формулы для арифметической прогрессии:

- Общий член: $a_n = a_0 + nd$;
- Сумма первых n членов: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = na_0 + \frac{n(n+1)}{2}d$;
- Сумма от k до n членов: $a_k + a_{k+1} + \dots + a_n = \frac{a_k + a_n}{2}(n - k + 1)$.

1.2 Основные формулы для геометрической прогрессии:

- Общий член: $b_n = b_0 q^n$;
- Сумма первых n членов: $b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$;
- Сумма от k до n членов: $b_k + b_{k+1} + \dots + b_n = b_k \frac{q^{n-k+1} - 1}{q - 1}$;
- Произведение первых n членов: $b_1 b_2 \dots b_n = b_0^n \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}$;
- Произведение от k до n членов: $b_k b_{k+1} \dots b_n = b_0^{n-k+1} \cdot q^{\frac{(k+n)(n-k+1)}{2}}$.

2 Телескопические ряды

Определение. Телескопическая ряд – сумма или произведение, которые могут быть легко получены, исходя из того, что при правильной группировке и раскрытии скобок почти все слагаемые или множители сокращаются.

1. В качестве примера рассмотрим вот такую сумму:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

В общем случае можно записать нечто такое для суммы:

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

И нечто такое для телескопического произведения:

$$\prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1}.$$

2. В качестве примера на произведение рассмотрим следующее:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{9} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2} \right) &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \right) \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{101}{200} = \frac{101}{200}. \end{aligned}$$

3 Частичные суммы и произведения

$$S_n = a_1 + \dots + a_n \quad P_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$$

Переход к ним часто возникает в задачах, если спрашивается про суммы (или произведения) последовательных элементов, потому что, например, сумму и произведение элементов от k до n легко выразить, как $S_n - S_{k-1}$ и P_n/P_{k-1} .

3. Пусть дана последовательность из n чисел. Докажите, что найдётся несколько элементов этой последовательности таких, что их сумма делится на n .

Решение. Рассмотрим частичные суммы S_k этой последовательности: $S_k = a_1 + \dots + a_k$. Таких, очевидно, будет n штук. Если среди них уже было то число, которое даёт остаток 0 при делении на n , то победа. Если такого не произошло, то по принципу Дирихле есть две суммы S_i и S_j ($i < j$), которые дают одинаковые остатки при делении на n . Тогда число $S_j - S_i = a_{i+1} + \dots + a_j$ будет делиться на n , а мы этого и хотели.

4 Рекуррентные последовательности

Сразу обращаем внимание, что во многих олимпиадах невысокого уровня (а также в отборочных этапах) наличие рекурренты в задаче обычно подразумевает, что последовательность достаточно быстро заикнется, поэтому просто нужно аккуратно вычислить первые несколько её членов, найти закономерность и победить. В этом разделе мы обсудим более общий план решения задач с рекуррентами, где последовательности могут и не заикнуться.

Определение. Последовательность чисел $a_0, a_1, \dots, a_n$, которая при заданных p и q удовлетворяет соотношению

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\heartsuit)$$

называется линейной рекуррентной (возвратной) последовательностью второго порядка.

Уравнение

$$x^2 - px - q = 0 \quad (\spadesuit)$$

называется характеристическим уравнением этой последовательности.

Рассмотрим a_n вида $c\alpha^n$. Если оно подходит под $(\heartsuit)$, то $c\alpha^{n+2} = pc\alpha^{n+1} + qc\alpha^n$, значит, $\alpha^2 = p\alpha + q$, то есть α – корень $(\spadesuit)$.

Обратно, если $\alpha^2 = p\alpha + q$, то $c\alpha^{n+2} = pc\alpha^{n+1} + qc\alpha^n$, то есть $a_n = c\alpha^n$ удовлетворяет $(\heartsuit)$.

Теперь заметим, что последовательность однозначно задаётся первыми двумя её членами a_0 и a_1 .

Утверждение. Если у $(\spadesuit)$ есть два различных корня x_1 и x_2 , то существуют единственные c_1 и c_2 такие, что

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 \\ a_1 = c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases}$$

Доказательство. Предъявим такие c_1 и c_2 : $c_1 = \frac{a_0x_2 - a_1}{x_2 - x_1}$, $c_2 = \frac{a_0x_1 - a_1}{x_1 - x_2}$. □

Таким образом, мы научились вычислять общую формулу линейной рекурренты второго порядка.

Теперь изучим несколько полезных примеров

4. (Формула Бине)

Вычислим F_n : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, поэтому характеристическим уравнением этой последовательности будет $t^2 - t - 1 = 0$, откуда $x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, поэтому $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, тогда

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

5. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Имеем: $t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3) = 0$, то есть $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$, тогда $c_1 = -1$ и $c_2 = 1$, поэтому $a_n = -2^n + 3^n = 3^n - 2^n$.

Утверждение. Если ($\spadesuit$) имеет корень $x_0 \neq 0$ кратности 2, то существуют единственные c_1 и c_2 такие, что

$$\begin{cases} a_0 = c_1 \\ a_1 = (c_1 + c_2)x_0 \end{cases}$$

и $a_n = (c_1 + c_2n)x_0^n$ удовлетворяет ($\heartsuit$).

Доказательство.

$$c_1 = a_0 \quad c_2 = \frac{a_1}{x_0} - a_0$$

Проверяем: $c_1x_0^{n+2} = c_1px_0^{n+1} + c_1qx_0^n$, так как $x_0^2 = px_0 + q$. Далее $(n+2)c_2x_0^{n+2} = (n+1)c_2x_0^{n+1}p + nc_2x_0^nq$, то есть $(n+2)x_0^{n+2} = (n+1)x_0^{n+1}p + nx_0^nq$. Таким образом, $p = 2x_0$, $q = -x_0^2$ и $x^2 - px - q = (x - x_0)^2$. $\square$

Замечание. Любая арифметическая прогрессия задаётся характеристическим уравнением вида: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Имеем $t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 = 0$, то есть $t_1 = t_2 = 1$, то есть по нашей формуле общий вид решения будет как раз $a_n = c_1 + c_2n$, что неудивительно.

Утверждение. Если уравнение ($\spadesuit$) оказалось третьей или большей степени, то общая формула для последовательности a_n строится аналогично:

1) Если все корни характеристического многочлена различны, то $a_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n + \dots + c_kx_k^n$, где k – степень многочлена, x_i – сами корни, c_i – коэффициенты, которые находятся из начальных данных.

2) Если есть одинаковые корни, то всё сложно – если корень x_1 будет кратности r , то вместо $c_1x_1^n$ в формуле из предыдущего пункта будет $(c_1 + c_2n + c_3n^2 + \dots + c_rn^{r-1})x_1^n$.

3) Если в рекурренте присутствует мусор (обычно это какая-то функция от n), то есть, например, $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + f(n)$, то нужно заменить последовательность на такую $b_n = a_n + g(n)$, чтобы для b_n рекуррента была чистой (то есть $b_{n+2} = pb_{n+1} + qb_n$. Как подобрать $g(n)$ – вопрос творческий, но глобально должно хватать функции той же степени, что и $g(n)$. Например, в случае последовательности $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n$ подойдёт $b_n = a_n + (n+1)$ – ведь $b_{n+2} - (n+3) = b_{n+1} - (n+2) + b_n - (n+1) + n$ равносильно $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$, то есть для b_n мы решать задачу умеем, тогда и для a_n умеем.

4) Если же получается, что у уравнения нет корней, то высшая математика говорит нам о том, что они на самом деле есть, просто комплексные. Все формулы буквально продолжают работать также, однако для комплексного α вообще не вау-эффект вдруг оказаться в какой-то степени единицей, поэтому наличие комплексных корней обычно и будет свидетельством того, что последовательность закичивается достаточно быстро.

Классический пример – рекуррента $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ имеет в левой части характеристического уравнения многочлен $x^2 - x + 1$, у которого нет вещественных корней. Однако, если просто начать со случайных стартовых данных a_0 и a_1 , мы получим: $a_0, a_1, a_1 - a_0, -a_0, -a_1, -a_1 + a_0, a_0, a_1, \dots$, то есть последовательность закичивается уже через 6 шагов!

Закончим всё хорошим примером решения задачи ФизТеха 2014 года, в которой, казалось бы, вообще не упоминается последовательностей и рекуррент.

6. Кузнечик прыгает по вершинам правильного треугольника ABC , прыгая каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами он может попасть из вершины A обратно в вершину A за 9 прыжков?

Ответ: 170.

Решение. Заведём две последовательности. Пусть a_n – количество способов за n шагов вернуться из вершины в неё саму же (понятно, что не имеет значения, какая это вершина). Пусть b_n – количество способов за n шагов попасть из вершины в её соседа по часовой стрелке (понятно, что способов попасть в соседа против часовой стрелки столько же). Некоторые стартовые данные найти легко: $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 2; b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 1$. Попробуем найти рекуррентные зависимости. Заметим, что $a_n = 2b_{n-1}$, так как если мы последним шагом вернулись, то до этого за $n - 1$ шаг пришли в соседнюю. Также $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, так как за $n - 1$ шаг мы должны были либо оказаться в исходной, либо в другой соседней. Отсюда $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$, наша прекрасная рекуррента. Характеристическое: $x^2 - x - 2 = 0$, корни $x = 2$ и $x = -1$, из стартовых данных понимаем, что $b_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$, тогда $a_n = 2b_{n-1} = \frac{2^n - 2(-1)^{n-1}}{3}$, тогда $a_9 = \frac{2^9 - 2}{3} = 170$, ура!