

Конспект занятия от 16 октября

Планиметрия в координатах

0.1 Полезные формулы для счёта в координатах

(Пусть у нас есть точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, прямые $\ell_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ или $y = k_1x + d_1$ и $\ell_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ или $y = k_2x + d_2$)

1. Расстояние $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

2. Деление отрезка AB точкой C в отношении $AC : CB = \lambda$: $C \left(\frac{x_1 + x_2\lambda}{1 + \lambda}; \frac{y_1 + y_2\lambda}{1 + \lambda} \right)$.

2'. Середина AB : $M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$.

3. Параллельность ℓ_1 и ℓ_2 : $k_1 = k_2$.

4. Перпендикулярность ℓ_1 и ℓ_2 : $k_1k_2 = -1$.

5. Уравнение прямой через точки A и B : $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

6. Расстояние от точки A до прямой ℓ_1 : $\frac{|a_1x_1 + b_1y_1 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$.

7. Различные формулы на угол α между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 :

$$\cos \alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

8. Формула для площади треугольника: $\frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_2|$.

0.2 Полезные формулы для работы с векторами в координатах

(Пусть у нас есть точки $A(a_x; a_y)$, $B(b_x; b_y)$, $C(c_x; c_y)$, $D(d_x; d_y)$, векторы $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$)

1. Вектор $\vec{AB} = (b_x - a_x; b_y - a_y)$.

2. Сумма/разность $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$.

3. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

4. Перпендикулярность AB и CD : $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

0.3 Примеры

1. Найдите максимальное значение величины $x^2 + y^2 + z^2$, если известно, что $x^2 + y^2 + z^2 = 3x + 8y + z$.

Источник: Надежда Энергетики, 2023

Ответ: 74.

Решение. Введём декартову систему координат и рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$ с координатами (x, y, z) и фиксированный вектор $\vec{c}$ с координатами $(3, 8, 1)$. Тогда левая часть условия представляет собой квадрат длины вектора $\vec{a}$, а правая – скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$: $|\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{c})$.

Оценивая скалярное произведение через длины сомножителей, получаем

$$|\vec{a}|^2 \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \leq |\vec{c}|.$$

Как известно, равенство возможно, и достигается при векторах, лежащих на одной прямой. Поэтому максимальное значение будет достигаться, например, при $\vec{a} = \vec{c}$.

Подставляя значения, получаем ответ $3^2 + 8^2 + 1^2 = 74$.

2. В неравнобедренном треугольнике ABC точка K – середина стороны AB , M – точка пересечения медиан, I – центр вписанной окружности. Известно, что $\angle KIB = 90^\circ$. Докажите, что $MI \perp BC$.

Источник: Изумруд, 2022

Решение. Видим условия на перпендикулярности – думаем о векторах. Попробуем всё выразить через векторы $\vec{c} = \vec{BA}$ и $\vec{a} = \vec{BC}$. Такие обозначения обусловлены тем, что нам пригодятся длины сторон a , b и c для выражения I , так что в этом задании у нас $|\vec{c}| = c$, $|\vec{a}| = a$.

Поехали! Если $\angle KIB = 90^\circ$, то $\vec{KI} \cdot \vec{BI} = 0$.

Если BL – биссектриса целиком, то $\vec{BL} = \frac{a}{a+c}\vec{c} + \frac{c}{a+c}\vec{a}$ из-за свойства биссектрисы про отношение отрезков $AL : LC = AB : BC$. Так как AI – тоже биссектриса треугольника ABL , то $BI : IL = BA : AL = c : \frac{cb}{a+c} = a+c : b$, откуда $\vec{BI} = \frac{a+c}{a+b+c}\vec{BL} = \frac{a}{a+b+c}\vec{c} + \frac{c}{a+b+c}\vec{a}$. Теперь $\vec{KI} = \vec{KB} + \vec{BI} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{a}{a+b+c}\vec{c} + \frac{c}{a+b+c}\vec{a} = \frac{c}{a+b+c}\vec{a} + \frac{a-b-c}{2(a+b+c)}\vec{c}$.

Для того, чтобы $\vec{KI} \cdot \vec{BI} = 0$, можно рассматривать вместо исходных векторов, пропорциональные им, – в частности, можно умножить на все знаменатели, чтобы с ними не возиться. Тогда имеем $0 = (a\vec{c} + c\vec{a}) \cdot (2c\vec{a} + (a-b-c)\vec{c}) = 2c^2a^2 + a(a-b-c)c^2 + (2ac + c(a-b-c))\vec{a} \cdot \vec{c} = c(3a-b-c)(ac + \vec{a} \cdot \vec{c})$. Заметим, что $c \neq 0$, а также $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq -ac$, так как в этом случае $\angle B = 180^\circ$, что странно. Поэтому $3a = b + c$, запомнили.

Теперь выразим $\vec{MI} = \vec{MB} + \vec{BI}$. Заметим, что $MB = 2/3$ всей медианы, поэтому $\vec{MB} = -\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a}$, откуда $\vec{MI} = \frac{2a-b-c}{3(a+b+c)}\vec{c} + \frac{2c-a-b}{3(a+b+c)}\vec{a}$.

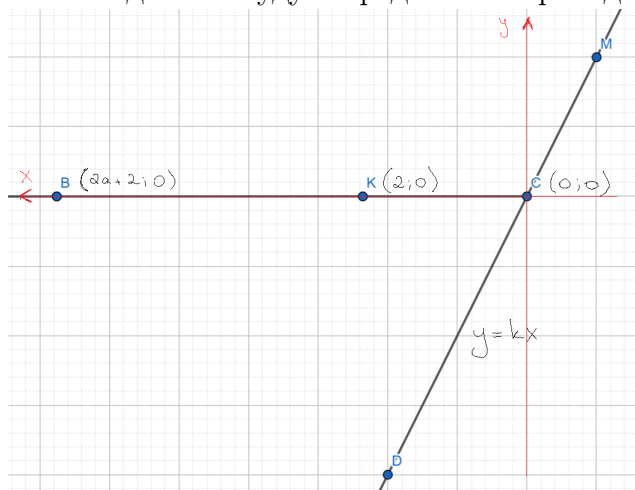
Проверим, что $\vec{MI} \cdot \vec{BC} = 0$. Опять же можно избавиться от знаменателей, так как пропорциональные векторы тоже перпендикулярны. $((2a-b-c)\vec{c} + (2c-a-b)\vec{a}) \cdot \vec{a} = (2a-b-c)\vec{c} \cdot \vec{a} + (2c-a-b)a^2$. Из теоремы косинусов $\vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$, поэтому $(2a-b-c)\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + (2c-a-b)a^2$. Осталось сказать, что $2a-b-c = -a$, сократить на a , умножить на 2, после чего подставить $b = 3a - c$, получится: $-a^2 - c^2 + (3a-c)^2 + 2(3c-4a)a$, что, как видно, равно нулю, чего и хотелось.

3. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC и продолжение стороны DC за точку C в точках K и M соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника KCM лежит на описанной окружности треугольника BCD .

Источник: Всесиб, 2024

Решение. Самое главное – понять, что A и сам параллелограмм нам особо не нужны – достаточно заметить, что из геометрических соображений $CM = CK$ и $BK = CD$.

Зададим картинку, используя как можно меньше переменных. Очевидно, что ключевая точка в задаче – это точка C (она фигурирует во всех условиях), поэтому возьмём её за $(0; 0)$. Также логично взять какую-нибудь прямую через неё за Ox (например, луч CB пусть сонаправлен Ox). У нас ещё остался масштаб в нашем распоряжении, поэтому возьмём $CK = 2$, то есть $K(2; 0)$ (лучше взять 2, так как дальше будут серединные перпендикуляры, чтобы не было знаменателей).



Остальные точки действительно задаются через две переменные – наклон CD и длину MK . Пусть прямая CD имеет уравнение $y = kx$, а $BK = 2a$, поэтому $B(2a+2; 0)$. Заметим, что тогда $CD = 2a$, $CM = 2$, то есть координаты $M(x_0; kx_0)$ таковы, что $x_0^2(k^2 + 1) = 4$, то есть $x_0 = \frac{-2}{\sqrt{k^2 + 1}}$ (знак «-» берётся из-за направления осей), то есть $M\left(\frac{-2}{\sqrt{k^2 + 1}}; \frac{-2k}{\sqrt{k^2 + 1}}\right)$. Аналогично можно найти $D\left(\frac{2a}{\sqrt{k^2 + 1}}; \frac{2ak}{\sqrt{k^2 + 1}}\right)$.

Осталось самое интересное – найти координаты центра (KCM) точки O и координаты центра (BCD) точки O' . Заметим, что если мы после этого проверим, что $O'C = O'O$, то O будет лежать на той же окружности (BCD) , как нам и хочется доказать.

Пересечём серединные перпендикуляры к KC и CM – один из них имеет уравнение $x = 1$, а другой проходит через точку $\left(\frac{-1}{\sqrt{k^2+1}}; \frac{-k}{\sqrt{k^2+1}}\right)$ (середина CM) и имеет угловой коэффициент $\frac{-1}{k}$ (так как перпендикулярен $y = kx$). Уравнение второго серединного перпендикуляра будет иметь виде $y = \frac{-1}{k} \left(x + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right) - \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$, пересекаем с $x = 1$ и получаем $O \left(1; \frac{-1}{k} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right) - \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right)$ или $O \left(1; -\frac{\sqrt{k^2+1}+1}{k}\right)$.

Теперь пересечём серединные перпендикуляры к BC и CD – один из них имеет уравнение $x = a + 1$, а другой проходит через точку $\left(\frac{a}{\sqrt{k^2+1}}; \frac{ak}{\sqrt{k^2+1}}\right)$ (середину CD) и имеет угловой коэффициент $\frac{-1}{k}$ (так как перпендикулярен $y = kx$). Уравнение второго серединного перпендикуляра будет иметь вид: $y = \frac{-1}{k} \left(x - \frac{a}{\sqrt{k^2+1}}\right) + \frac{ak}{\sqrt{k^2+1}}$, пересекаем с $x = a + 1$ и получаем $O' \left(a + 1; \frac{-a - 1 + a\sqrt{k^2+1}}{k}\right)$.

$$\text{Проверяем } O'C^2 = O'O^2: (a+1)^2 + \frac{(-a-1+a\sqrt{k^2+1})^2}{k^2} = a^2 + \frac{(-a+(a+1)\sqrt{k^2+1})^2}{k^2}.$$

Если раскрыть скобочки и умножить всё на k^2 , то и слева, и справа получится $2a^2k^2 + 2ak^2 + k^2 + 2a^2 + 2a + 1 - 2a(a+1)\sqrt{k^2+1}$, то есть одно и тоже.