

Лемма об уточнении показателя

Обозначение. Пусть n — натуральное число, p — простое. Обозначим за $\nu_p(n)$ степень вхождения p в n .

Лемма об уточнении показателя (LTE). Пусть x и y — произвольные целые числа, p — нечётный простой делитель $x - y$, причём p не делит xy . Тогда

$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n).$$

LTE для двойки. Пусть x и y — нечётные целые числа. Тогда если $x - y$ делится на 4 или n нечётно, то

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu_2(n).$$

Задача. Вычислите (а) $\nu_3(7^{300} - 2^{300})$; (б) $\nu_5(99^{25} + 1)$; (в) $\nu_2(5^{100} - 3^{100})$.

Задача. Пусть $a, n \geq 2$ — целые числа такие, что n делит $(a-1)^k$ для некоторого $k \geq 1$. Докажите, что n делит $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$.

Задача. Решите в натуральных числах уравнение $p^x - y^p = 1$, p — простое.

Задача. Определите все натуральные числа n , такие, что $\frac{2^n + 1}{n^2}$ является целым числом.

1. Сколькими нулями оканчивается число $4^{56} + 6^{54}$?
2. В какой степени 5 входит в разложение числа $3^{1000} - 2^{1000}$ на простые множители?
3. Натуральные числа a, b разной чётности, а также натуральное c таковы, что $a^c - b^c$ делится на c . Докажите, что также $a^c - b^c$ делится на $(a-b)c$.
4. Пусть n — нечётное положительное целое число. Докажите, что $((n-1)^n + 1)^2$ делит $n(n-1)^{(n-1)^n+1} + n$.
5. Различные вещественные числа a, b таковы, что $a-b, a^2-b^2, a^3-b^3, \dots$ целые. Докажите, что a и b целые.
6. Найдите все пары натуральных чисел (x, n) , для которых $x > 2$, $n > 1$ и $x^n - 1$ — степень простого числа.
7. Решите в натуральных числах уравнение $z^x + 1 = (z+1)^y$.
8. Решите в натуральных числах уравнение $(n-1)! + 1 = n^m$.
9. Найдите все такие натуральные k , что произведение первых k нечётных простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).
10. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Докажите, что для достаточно больших натуральных $n \in \mathbb{N}$ сумма

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n$$

не является целой.