

Производящие функции. Задачи

1. С помощью производящих функций вычислите суммы

- (a) $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$;
- (b) $C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + n^2C_n^n$
- (c) $C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1}$.

2. (a) Найдите формулу для члена u_n последовательности $\{u_n\}$, заданной соотношениями

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n, \quad u_0 = 0, u_1 = 1.$$

(b) Найдите формулу для члена v_n последовательности $\{v_n\}$, заданной соотношениями

$$v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n + n, \quad v_0 = 0, v_1 = 1.$$

3. (a) Докажите, что коэффициент k при степени k производящей функции $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$ равен количеству разбиений числа k на различные натуральные слагаемые без учёта порядка.

(b) Найдите производящую функцию ряда b_k — количества разбиений числа k на натуральные слагаемые с учётом порядка;

(c) Найдите производящую функцию ряда c_k — количества разбиений числа k на натуральные слагаемые без учёта порядка;

(d) Найдите производящую функцию ряда d_k — количества разбиений числа k на нечётные натуральные слагаемые без учёта порядка;

(e) Докажите, что $a_k = d_k$.

4. Множество $\mathbb{N}_0$ разбито на конечное число арифметических прогрессий с начальными членами $a_1, \dots, a_k$ и разностями $d_1, d_2, \dots, d_k$. Докажите, что

(a) $\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \dots + \frac{a_k}{d_k} = \frac{k-1}{2}$;

(b) среди чисел $d_1, d_2, \dots, d_k$ есть два одинаковых.

5. Найдите количество подмножеств множества $\{1, 2, \dots, 2000\}$, сумма элементов которых делится на (a) 4; (b) 3.

6. Предположим, что существуют два различных неупорядоченных набора $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ из натуральных чисел (возможно, повторяющихся), таких, что $A + A = B + B$. Докажите, что n — степень двойки.

Здесь для набора $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ выражение $X + X$ обозначает набор $\{x_i + x_j \mid j \neq i\}$.