

## Часть 1. Радикальный центр окружностей Эйлера

Здесь и далее дан треугольник  $ABC$ . Точки  $A_1, B_1, C_1$  — середины дуг  $BC, AC$  и  $AB$ , не содержащих точки  $A, B$  и  $C$  соответственно, окружности  $\Omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ ,  $I$  — центр описанной окружности этого треугольника, а  $O$  — центр  $\Omega$ . Точки  $M_a, M_b$  и  $M_c$  — середины  $BC, AC$  и  $AB$ . Вписанная окружность  $\triangle ABC$  касается сторон  $BC, AC$  и  $AB$  в точках  $K_a, K_b$  и  $K_c$ .

Точки  $A_2, B_2, C_2$  симметричны точкам  $A_1, B_1, C_1$  относительно сторон  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно. Точки  $E_a, E_b$  и  $E_c$  — середины отрезков  $IA_2, IB_2$  и  $IC_2$ ,  $E$  — середина  $IO$ .

**Упр. 1.** Докажите, что  $E$  — центр окружности девяти точек  $\triangle A_1B_1C_1$ .

**Упр. 2.** Докажите, что:

(a)  $\triangle A_1OI \sim \triangle A_1IA_2$ ;

(b)  $\angle C_1A_1E = \angle E_aA_1B_1$ ;

(c) прямые  $A_1E_a, B_1E_b, C_1E_c$  пересекаются в одной точке.

Пусть точки  $H_c, H_a$  и  $H_b$  — ортоцентры треугольников  $AIB, BIC$  и  $CIA$  соответственно.

**Упр. 3.** (a) Докажите, что  $A_2$  — центр описанной окружности  $BH_aC$ .

(b) Докажите, что  $E_a$  — центр окружности девяти точек треугольника  $BIC$ .

**Задача 1** (Точка Шиффлера). Докажите, что прямые Эйлера треугольников  $AIB, BIC$  и  $CIA$  пересекаются в одной точке.

Обозначим точку Шиффлера треугольника  $ABC$  через  $Sh$ .

Мы пока не доказали, что через точку  $Sh$  проходит прямая Эйлера треугольника  $ABC$ . Отложим это, а пока докажем интересный факт, но прежде снова придется преодолеть несколько вспомогательных утверждений.

Пусть  $\omega_a$  — внеписанная окружность треугольника  $ABC$ , касающаяся стороны  $BC$  в точке  $T$  и продолжений сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $L$  и  $N$ . Аналогично определяются окружности  $\omega_b, \omega_c$ . Точки  $I_a, I_b$  и  $I_c$  — центры  $\omega_a, \omega_b$  и  $\omega_c$  соответственно.

**Упр. 4.** Пусть  $I'$  — центр вписанной окружности треугольника  $M_aM_bM_c$ . Докажите, что середина отрезка  $AA_2$  — центр окружности  $(M_bI'M_c)$ .

**Упр. 5.** Докажите, что прямая Эйлера треугольника  $M_bI'M_c$  параллельна прямой  $A_2I_a$ .

**Упр. 6.** Окружность  $\alpha_1$  — образ окружности  $(I_bCA)$  при симметрии относительно  $I_bC$ , окружность  $\alpha_2$  — образ окружности  $(I_cBA)$  при симметрии относительно  $I_cB$ . Докажите, что точка  $A_2$  лежит на радикальной оси  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

**Задача 2** (J.-P. Ehrmann, P. Yiu, K. L. Nguyen). Докажите, что радикальный центр окружностей Эйлера треугольников  $BI_aC$ ,  $CI_bA$  и  $AI_cB$  является точкой Шиффлера для треугольника  $M_aM_bM_c$ .

В работе [7] доказаны и другие любопытные свойства радикальной оси окружностей Эйлера треугольников  $CI_bA$  и  $AI_cB$ . В частности, утверждается, что на ней лежит внешняя точка Фейрбаха  $F_a$  треугольника  $ABC$ . Заинтересованные читатели могут самостоятельно попробовать доказать этот факт или разобраться в его решении в источнике.

Рассмотрим треугольник  $\Delta$ , образованный прямыми, аналогичными  $LN$  (т.е. соединяющими точки касания вневписанных окружностей с продолжениями соответствующих сторон) и треугольник  $\Theta$  с вершинами в серединах дуг  $M_bM_c$ ,  $M_cM_a$  и  $M_aM_b$  описанной окружности треугольника  $M_aM_bM_c$ .

**Упр. 7.** Докажите, что треугольник  $\Delta$  гомотетичен треугольнику  $\Theta$ .

**Упр. 8.** Докажите, что центр описанной окружности  $\Delta$  совпадает с ортоцентром исходного треугольника  $ABC$ , а центр описанной окружности  $\Theta$  совпадает с центром окружности Эйлера  $ABC$ .

**Упр. 9.** Докажите, что вершины треугольника  $\Delta$  лежат на радикальных осях соответствующих пар окружностей Эйлера треугольников  $BI_aC$ ,  $CI_bA$  и  $AI_cB$ .

**Задача 3.** Докажите, что радикальный центр окружностей Эйлера треугольников  $BI_aC$ ,  $CI_bA$  и  $AI_cB$  лежит на прямой Эйлера треугольника  $ABC$ .