

Тригонометрия

1. Докажите, что при $k > 10$ в произведении

$$f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x \cdots \cos 2^k x$$

можно заменить множитель вида $\cos nx$ на $\sin nx$ так, что получится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая при всех действительных x неравенству

$$|f_1(x)| \leq \frac{3}{2^{k+1}}.$$

2. Какое наибольшее количество множителей вида $\sin \frac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin \frac{\pi}{x} \sin \frac{2\pi}{x} \cdots \sin \frac{2024\pi}{x} = 0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

3. Существует ли такое положительное число α , что при всех действительных x верно неравенство

$$|\cos x| + |\cos \alpha x| > \sin x + \sin \alpha x?$$

4. Даны двадцать положительных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два таких числа a и b , что будет выполнено неравенство

$$\frac{|a-b|}{1+ab} < \frac{1}{10}.$$

5. Даны различные натуральные числа a и b . На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c , отличное от a и b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

6. Существует ли такое действительное x , что числа $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{ctg} 2004x$ оба целые?