

Многочлены в картинках.

3 декабря

1. Дан график $\Gamma = \{(x, y) : y = f(x)\}$ квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(а) Рассмотрим параллельно перенесенную ДСК $(x, y) \rightarrow (x', y')$, где $x' = x + d$ и $y' = y + e$. Докажите, что Γ задается в новых координатах (x', y') как $y' = g(x')$, где g — квадратный трехчлен со старшим коэффициентом a .

(б) Рассмотрим центрально симметричную ДСК $(x, y) \rightarrow (x', y')$, где $x' = -x$ и $y' = -y$. Докажите, что Γ задается в новых координатах (x', y') как $y' = g(x')$, где g — квадратный трехчлен со старшим коэффициентом $-a$.

Полезный факт — неравенство треугольника: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ верно, что $|a + b| \leq |a| + |b|$.

2. Используя неравенство треугольника, докажите что для всякого многочлена

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ существует такая константа $C > 0$, что при $|x| > C$ справедлива оценка

$$|a_n x^n| > |a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0|.$$

3. (а) Докажите, что для произвольной константы $D > 0$ и многочлена $P(x)$ степени хотябы один найдется константа $C > 0$ такая, что при $|x| > C$ верна оценка $|P(x)| > D$.

(б) Докажите, что для всякого многочлена найдется константа $C > 0$ такая, что лучи $(-\infty, -C)$ и $(C, +\infty)$ являются участками монотонности многочлена $P(x)$ (то есть на каждом из них многочлен либо возрастает, либо убывает).

(с) Докажите, что для всякого многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ найдется константа $C > 0$ такая, что при $|x| > C$ знаки выражений $P(x)$ и $a^n x^n$ совпадают.

Полезный факт — теорема о промежуточном значении для многочленов. Пусть есть многочлен $P(x)$ и отрезок $[a, b]$. Не нарушая общности, предположим, что $P(a) < P(b)$. Тогда для всякого $y \in [P(a), P(b)]$ существует $x \in [a, b]$ такой, что $P(x) = y$.

4. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что трёхчлена $f(x)$ есть хотя бы один корень на отрезке $[0, 1]$.

5. У многочлена $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ все коэффициенты вещественны, $a_0 \neq 0$ и есть как минимум один вещественный корень. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке его одночлены, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один вещественный корень.

6. Для некоторого многочлена с вещественными коэффициентами существует бесконечное множество его вещественных значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках. Докажите, что существует не более одного целого значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке.