

- 1) На отрезке AB построена дуга α . Окружность ω касается отрезка AB в точке T и пересекает α в точках C и D . Лучи AC и TD пересекаются в точке E , лучи BD и TC – в точке F . Докажите, что прямые EF и AB параллельны.
- 2) Точки A' , B' , C' лежат на сторонах BC , CA , AB треугольника ABC . Точка X такова, что $\angle AXB = \angle A'C'B' + \angle ACB$ и $\angle BXC = \angle B'A'C' + \angle BAC$. Докажите, что четырёхугольник $XA'BC'$ – вписанный.
- 3) Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Точки C и D , лежащие соответственно на ω_1 и ω_2 по разные стороны от прямой AB , равноудалены от этой прямой. Докажите, что точки C и D равноудалены от середины отрезка O_1O_2 .
- 4) Центр окружности ω_2 лежит на окружности ω_1 . Из точки X окружности ω_1 проведены касательные XP и XQ к окружности ω_2 (P и Q – точки касания), которые повторно пересекают ω_1 в точках R и S . Докажите, что прямая PQ проходит через середину отрезка RS .
- 5) Точка M – середина стороны AC треугольника ABC . На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Описанная окружность треугольника ABQ второй раз пересекает сторону BC в точке X , а описанная окружность треугольника BCP , второй раз пересекает сторону AB в точке Y . Докажите, что четырёхугольник $BXMY$ – вписанный.
- 6) Окружность ω касается прямых a и b в точках A и B соответственно. Произвольная касательная к ω пересекает a и b в точках X и Y соответственно. Точки X' и Y' симметричны точкам X и Y относительно A и B соответственно. Найдите геометрическое место проекций центра окружности на $X'Y'$.
- 7) Дан вписанный n -угольник. Оказалось что середины всех его сторон лежат на одной окружности. Стороны n -угольника отсекают от этой окружности n дуг, лежащих вне n -угольника. Докажите, что эти дуги можно покрасить в красный и синий цвет так, чтобы сумма длин красных дуг равнялась сумме длин синих