

Радоси

1. Даны окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекающиеся в точках A и B . На луче AB вне отрезка AB выбраны точки X и Y . Пусть XK и YL касательные к ω_2 (точки K и L лежат на ω_2). Известно, что $XK = 2$, $YL = 5$, $YO_1 = 2XO_1$. Найдите радиус ω_1 .
2. Пусть AB и AC — касательные к окружности w , и пусть M , N — середины отрезков AB и AC . Пусть P — произвольная точка на прямой MN . Докажите, что $PA = PD$, где PD — касательная к w .
3. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Окружность, проходящая через точки A и B , пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q , а отрезки диагоналей — в точках M и N . Докажите, что прямые PQ , MN и CD пересекаются в одной точке.
4. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — середины меньших дуг BC , AC и AB описанной окружности остроугольного $\triangle ABC$. Точка I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника $\triangle ABC$. Точка B^* на прямой AC такова, что $B^*I \perp BI$. Аналогично определяются точки A^* и C^* . Докажите, что
 - (а) B^* лежит на радикальной оси описанной окружности $\triangle AIC$ и окружности, построенной как на диаметре на отрезке B_1I ;
 - (б) B^* лежит на радикальной оси описанной окружности $\triangle ABC$ и точки I (точка — окружность нулевого радиуса);
 - (в) A^* , B^* и C^* лежат на одной прямой, перпендикулярной OI (O — центр описанной окружности остроугольного $\triangle ABC$).
5. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C . Прямая l пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает l в точках P и Q . Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P , Q , S и T лежат на одной окружности.
6. В $\triangle ABC$ проведена вписанная окружность с центром I , касающаяся сторон AB , BC и AC в точках C_0 , A_0 и B_0 соответственно. Прямые $BI \cap A_0C_0 = K$. Докажите, что центр описанной окружности $\triangle BKB_0$ лежит на прямой AC .
7. Пусть дан треугольник ABC , P — произвольная точка на серединном перпендикуляре к стороне BC . Точки X и Y на отрезках AB и AC соответственно таковы, что $XY \parallel BC$ и $P \in XY$. Докажите, что прямая AP — радикальная ось (BPY) и (CPX).
8. В треугольнике ABC AH_1 и BH_2 — высоты; касательная к описанной окружности в точке A пересекает BC в точке S_1 , а касательная в точке B пересекает AC в точке S_2 ; T_1 и T_2 — середины отрезков AS_1 и BS_2 . Докажите, что прямые T_1T_2 , AB и H_1H_2 пересекаются в одной точке.