

Неравенства. Задачи

1. (а) Положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ удовлетворяют равенству $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Докажите, что

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2}.$$

(б) Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

2. (а) Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{a+b+c}.$$

(б) Для любых чисел $a, b, c > 0$ докажите неравенство

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1.$$

3. Для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_n + a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2} + a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n + a_1} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

4. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + d^2} + \frac{d^3}{d^2 + a^2} \geq \frac{a + b + c + d}{2}.$$

5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1 + a^2 + (b+1)^2} + \frac{1}{1 + b^2 + (c+1)^2} + \frac{1}{1 + c^2 + (a+1)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

6. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что

$$\frac{1}{5-a} + \frac{1}{5-b} + \frac{1}{5-c} + \frac{1}{5-d} \leq 1.$$