

Неравенства. Лекция 20.10.2025

0 Вводная задача

0. Для положительных x, y докажите неравенство

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

Решение. Применим неравенство Коши к знаменателям каждой из дробей

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{x}{2x^2y} + \frac{y}{2y^2x} = \frac{1}{xy}.$$

□

1 Поиск общего знаменателя

1. Даны положительные числа a, b, c, d . Докажите, что

$$1 \leq \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} \leq 2.$$

Решение. Цель метода состоит в том, чтобы свести сумму из условия к сумме дробей с одинаковыми знаменателями. Для доказательства левой части неравенства достаточно заметить, что

$$\frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1.$$

Для доказательства правой части воспользуемся неравенствами

$$\frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1, \quad \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} < \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 1.$$

□

2. Для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_n + a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2} + a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n + a_1} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

3. Пусть a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Решение. По условию числа a, b, c удовлетворяют неравенству треугольника, так что каждая из дробей левой части не превосходит 1. Перепишем левую часть неравенства в виде

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(1 - \frac{b+c-a}{b+c}\right) + \left(1 - \frac{a+b-c}{a+b}\right) + \left(1 - \frac{c+a-b}{c+a}\right).$$

Увеличивая знаменатель каждой из дробей до $a+b+c$, получаем неравенство

$$3 - \left(\frac{b+c-a}{b+c} + \frac{a+b-c}{a+b} + \frac{c+a-b}{c+a}\right) < 3 - \left(\frac{b+c-a}{a+b+c} + \frac{a+b-c}{a+b+c} + \frac{c+a-b}{a+b+c}\right) = 2.$$

□

2 Лемма Титу (КБШ для дробей)

Неравенство КБШ. Для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ имеет место неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Лемма Титу. Даны положительные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$. Имеет место неравенство

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}.$$

Доказательство. Достаточно подставить в неравенство КБШ

$$a_1 = \sqrt{y_1}, a_2 = \sqrt{y_2}, \dots, a_n = \sqrt{y_n} \text{ и } b_1 = \frac{x_1}{\sqrt{y_1}}, b_2 = \frac{x_2}{\sqrt{y_2}}, \dots, b_n = \frac{x_n}{\sqrt{y_n}}.$$

4. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}.$$

5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

Решение. Если попытаться применить лемму Титу напрямую (для $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{b}$, $x_3 = \sqrt{c}$ и $y_1 = b$, $y_2 = c$, $y_3 = a$), то мы получим неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{a+b+c}.$$

Однако можно показать, что неравенство

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{a+b+c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

неверно, так что использованное нами неравенство было слишком грубым. Для того, чтобы применить более точное неравенство, мы домножим числитель и знаменатель каждой из дробей на одно и то же число (обычно оно выбирается так, чтобы числители дробей были точными квадратами).

Перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

Полученное неравенство следует из леммы Титу для $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ и $y_1 = ab$, $y_2 = bc$, $y_3 = ca$. □

6. Даны положительные числа a, b, c , причём $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{1/a^2}{a(b+c)} + \frac{1/b^2}{b(a+c)} + \frac{1/c^2}{c(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

По лемме Титу имеем

$$\frac{1/a^2}{a(b+c)} + \frac{1/b^2}{b(a+c)} + \frac{1/c^2}{c(a+b)} \geq \frac{(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

По неравенству о средних для трёх чисел имеем

$$\frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

□

3 Реверсная техника Коши

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$. Чему равно наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2}?$$

Решение. Разумно предположить, что искомое значение достигается при равных значениях переменных. В этом случае $a = b = c = 1/3$ и

$$\frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, необходимо доказать неравенство

$$\frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Наша цель состоит в том, чтобы применить неравенство Коши к знаменателям каждой из дробей. Однако сделать это просто так не выйдет, поскольку знак используемого неравенства будет направлен в противоположную сторону. Для того, чтобы всё же осуществить задуманное, достаточно получить отрицательный знак перед дробями (тогда знак используемого неравенства сменится на необходимый). Воспользуемся тождествами

$$\frac{a}{1+9b^2} = a - \frac{9ab^2}{1+9b^2}, \quad \frac{b}{1+9c^2} = b - \frac{9bc^2}{1+9c^2}, \quad \frac{c}{1+9a^2} = c - \frac{9ac^2}{1+9c^2}$$

(здесь мы поделили числитель каждой дроби на одно из слагаемых в знаменателе). Теперь подставив это в левую часть доказываемого неравенства и применив неравенства Коши к знаменателям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} &= (a+b+c) - \left(\frac{9ab^2}{1+9b^2} + \frac{9bc^2}{1+9c^2} + \frac{9ca^2}{1+9a^2} \right) = \\ &= 1 - \left(\frac{9ab^2}{1+9b^2} + \frac{9bc^2}{1+9c^2} + \frac{9ca^2}{1+9a^2} \right) \geq 1 - \frac{3}{2}(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Таким образом, исходное неравенство свелось к неравенству $ab+bc+ca \leq 1/3$, которое следует из неравенства

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2.$$

Последнее неравенство остаётся участникам кружка в качестве упражнения. □

8. Пусть a, b, c, d — положительные числа с суммой 4. Докажите, что

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{d^2+1} + \frac{d+1}{a^2+1} \geq 4.$$

Решение. Действуем аналогично предыдущей задаче. Воспользуемся тождествами

$$\frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{ab^2+b^2}{b^2+1}, \quad \frac{b+1}{c^2+1} = b+1 - \frac{c^2b+c^2}{c^2+1}, \quad \frac{c+1}{d^2+1} = c+1 - \frac{d^2c+d^2}{d^2+1}, \quad \frac{d+1}{a^2+1} = d+1 - \frac{a^2d+a^2}{a^2+1}$$

и применим неравенства Коши к знаменателям

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{d^2+1} + \frac{d+1}{a^2+1} &= a+b+c+d+4 - \left(\frac{ab^2+b^2}{b^2+1} + \frac{bc^2+c^2}{c^2+1} + \frac{cd^2+d^2}{d^2+1} + \frac{da^2+a^2}{a^2+1} \right) \geq \\ &\geq 8 - \frac{1}{2}(ab+bc+cd+da+a+b+c+d). \end{aligned}$$

Таким образом, исходное неравенство сведено к неравенству

$$ab+bc+cd+da \leq 4,$$

которое следует из разложения на множители $ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d)$ (произведение двух чисел с суммой 4 не превосходит 4). □

4 Неравенство Чебышёва для дробей

Теорема. Даны два набора чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Тогда

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Замечание. Числа из наборов могут быть отрицательными!

Следствие Даны два набора чисел $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ и $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$, причём $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Тогда

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n} \geq 0.$$

9. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют равенству

$$a + b + c + d = a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1}.$$

Докажите неравенство

$$2(a + b + c + d) \geq \sqrt{a^2 + 3} + \sqrt{b^2 + 3} + \sqrt{c^2 + 3} + \sqrt{d^2 + 3}.$$

Решение. Перепишем условие в виде

$$\sum_{4\text{-cyc}} \left(a - \frac{1}{a} \right) = 0,$$

а доказываемое неравенство — в виде

$$\sum_{4\text{-cyc}} \left(2a - \sqrt{a^2 + 3} \right) \geq 0.$$

Домножив и поделив на сопряжённое, получим

$$\sum_{4\text{-cyc}} \left(2a - \sqrt{a^2 + 3} \right) = \sum_{4\text{-cyc}} \frac{3(a^2 - 1)}{2a + \sqrt{a^2 + 3}}.$$

Наша цель состоит в том, чтобы в числителях дробей получить числа, сумма которых равна по нулю по условию (тогда мы приблизимся к тому, чтобы использовать неравенство Чебышёва для дробей). Для этого перепишем

$$\sum_{4\text{-cyc}} \frac{a^2 - 1}{2a + \sqrt{a^2 + 3}} = \sum_{4\text{-cyc}} \frac{a - \frac{1}{a}}{2 + \sqrt{1 + \frac{3}{a^2}}}.$$

Чтобы применить неравенство Чебышёва для дробей осталось проверить, что числители и знаменатели дробей упорядочены противоположным образом. В самом деле, если $x \geq y$, то

$$x - x^{-1} \geq y - y^{-1}, \quad 2 + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \leq 2 + \sqrt{1 + \frac{3}{y^2}}. \quad \square$$

10. Пусть a, b, c — положительные числа с суммой 3. Докажите, что

$$\frac{1}{c^2 + a + b} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} \leq 1.$$