

Многочлены и алгебра

1. Приведённый многочлен $P(x)$ степени $n+1$ имеет корни $1, 2, \dots, n$, а также $P(n+1) = n!$. Найдите $P(n+2)$.
2. Пусть $P(x)$ - многочлен 10-ой степени такой, что $P(i) = P(-i)$ для $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Докажите, что для любого x выполнено $P(x) = P(-x)$.
3. Докажите, что для натуральных a, b, c выполняется, что

$$(a+b+c)^{333} - a^{333} - b^{333} - c^{333} \text{ делится на } (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3.$$

4. Пусть α является корнем многочлена $x^3 - 9x + 9$. Докажите, что $\alpha^2 + \alpha - 6$ тоже его корень.
5. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ такой, что $P(0), \dots, P(n)$ — различные степени тройки?
6. Существуют ли многочлены с вещественными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ такие, что

$$P^2(x) + Q^3(x) = x?$$