

Конспект занятия от 23 октября

Раскраски

1. На каждой из клеток доски размером 9×9 находится фишка. Петя хочет передвинуть каждую фишку на соседнюю по стороне клетку так, чтобы снова в каждой из клеток оказалось по одной фишке. Сможет ли Петя это сделать?

Ответ: нет.

Решение. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке так, чтобы все угловые клетки были чёрными. Тогда всего чёрных клеток на доске 41, а белых – 40. С чёрной клетки Петя может передвинуть фишку только на белую, а с белой – только на чёрную. Поэтому после того, как Петя сдвинет все фишки, на чёрных полях окажутся 40 фишек, то есть не все чёрные поля будут заняты.

2. Можно ли доску размером 7×7 разбить на доминошки? А с вырезанной клеткой A2?

Ответ: нет и нет.

Решение. Целую доску нельзя разбить, потому что в ней нечётное число клеток.

Если вырезать клетку, то их суммарное количество станет чётным. Но есть проблема. Покрасим доску в шахматном порядке, пусть угловые клетки чёрные. Тогда вырезанная клетка A2 была белая, то есть стало 25 чёрных и 23 белые клетки. Но доминошка занимает всегда по одной клетке каждого цвета, значит, такую доску разбить не получится.

3. Доска 8×8 разрезана на доминошки. Может ли быть 15 вертикальных и 17 горизонтальных доминошек?

Ответ: нет, не может.

Решение. Покрасим строки доски по очереди в чёрный и белый. Тогда вертикальные доминошки будут занимать клетки разных цветов, а горизонтальные – одинаковых. Так как всего на доске поровну чёрных и белых клеток, и вертикальные доминошки займут поровну клеток, горизонтальных одного цвета должно быть столько же, сколько другого, то есть в сумме чётное количество. А их нечётное.

4. Можно ли разбить квадрат 8×8 с вырезанным уголком на полоски 1×3 ?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Покрасим диагонали доски по очереди в три цвета так, чтобы вырезанный уголок совпадал с диагональю единичной длины. Тогда, если он был цвета 1, а дальше были цвета 2 и 3, то на неполноценной доске получилось 20 клеток первого цвета, 22 второго и 21 третьего. Очевидно, полоска 1×3 занимает по клетке каждого цвета, значит, на всей доске должно быть поровну клеток каждого цвета.

5. На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 21 клетка. Докажите, что среди них всегда можно выбрать не менее шести клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

Решение. Покрасим плоскость в четыре цвета: будем чередовать строки, где чередуются первый и второй цвета, со строками с чередующимися третьим и четвёртым цветами. Получим разбиение, где одинаковые цвета не соприкасаются. Тогда из 21 нашей клетки будет хотя бы шесть на одном цвете по принципу Дирихле, следовательно, они будут подходить под условие.

6. На каждой клетке доски размером 9×9 сидит жук. По свистку каждый из жуков переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом в некоторых клетках может оказаться больше одного жука, а некоторые клетки окажутся незанятыми. Докажите, что при этом незанятых клеток будет не меньше 9.

Решение. Покрасим вертикали доски в чёрный и белый цвет через одну. Получится 45 черных и 36 белых клеток. Заметим, что, переползая, жук меняет цвет клетки. Следовательно, на 45 чёрных клетках оказалось 36 жуков. Значит, по крайней мере 9 чёрных клеток оказались незанятыми.

7. Можно ли доску 10×10 разрезать на фигурки из четырёх клеток в форме буквы Г?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Покрасим доску «зеброй». Получим по 50 клеток каждого цвета, то есть поровну. Заметим, что наша фигура всегда занимает три клетки одного цвета и одну другого. Значит, фигур, где больше чёрных клеток, должно быть столько же, сколько и фигур, где больше белых клеток. То есть, фигур чётное количество. А из 100 клеток мы получим 25 четырёхклеточных фигур, беда-беда...

8. Какое наибольшее количество прямоугольников 4×1 можно разместить в квадрате 6×6 (не нарушая границ клеток)?

Ответ: 8.

Решение. Покрасим доску в четырёхцветную диагональную раскраску. Цветов будет по 9, 10, 9 и 8 клеток соответственно. Так как полоска занимает по клетке каждого цвета, больше восьми полосок разместить мы не сможем. Пример для 8 очевиден.

9. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, то есть симметрично отражаться относительно её центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3 , но в левом верхнем углу?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Раскрасим поле в шахматную раскраску. Делая ход, фишка не меняет цвета поля, на котором стоит. Осталось заметить, что в начальной расстановке фишки занимают пять белых полей и четыре чёрных, а в конечной – пять чёрных и четыре белых. Следовательно, ответ отрицательный.