

Конспект занятия от 16 октября

1 Базовая перечислительная комбинаторика

1.1 Сочетания и перестановки

1. $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ – количество способов выбрать из n объектов m без учёта порядка;
2. $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ – количество способов выбрать из n объектов m с учётом порядка;
3. $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$;
4. И «Цешки», и «Ашки» – целые числа, в силу комбинаторного определения;
5. $C_n^m = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!}$;
6. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$;
7. $C_n^m = C_m^{m-n}$.

1.2 Примеры использования:

1. (Бином Ньютона) $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n b^n$. В частности, $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Решение. Доказывается тривиальным представлением левой части в виде $(a+b)(a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)$. Тогда способов «набрать» слагаемое $a^{n-k} b^k$ будет ровно C_n^k , так как нужно выбрать из n скобочек k таких, из которых мы возьмём b , а из остальных автоматически будет взято a . Вторая часть получается подстановкой $a = b = 1$ в бином.

2. Монету подбрасывают 8 раз. При этом получается некоторая последовательность «орлов» и «решек» (длины 8). Сколько всего существует таких последовательностей, в которых «орёл» выпал ровно три раза?

Ответ: 56.

Решение. Пусть О означает «выпал орёл», а Р – «выпала решка». Тогда в результате восьми подбрасываний мы получим восьмибуквенное слово, состоящее из букв О и Р. Например, слово РОРРООРР означает, что орёл выпал при втором, пятом и шестом подбрасываниях, а в остальных случаях выпала решка.

Теперь ясно, что вопрос ставится так: сколько восьмибуквенных слов можно составить из трёх букв О и пяти букв Р? Заметим, что слово однозначно определяется выбором позиций для трёх букв О (остальные позиции автоматически заполняются буквами Р). Поэтому число наших слов есть число способов выбрать три позиции из восьми, то есть $C_8^3 = (8 \cdot 7 \cdot 6)/3! = 56$. Это и есть ответ.

Заметим также, что позиции можно было бы выбирать не для букв О, а для букв Р. А именно, слово однозначно определяется выбором позиций для пяти букв Р, что можно сделать $C_8^5 = 56$ способами. Как видите, $C_8^3 = C_8^5$, и это частный случай общего свойства числа сочетаний.

3. Пусть есть 3 красных шарика, 4 синих и 5 зелёных. Каково количество способов расположить шарик в ряд так, чтобы 2 синих друг друга не касались?

Ответ: 7056.

Решение. Сначала уберём все синие шарик. Разложить 3 красных и 5 зелёных у нас будет (как в предыдущей задаче) $C_8^3 = 56$, так как по сути из восьми мест для шариков нужно выбрать три места для красных. Теперь у нас есть 9 промежутков в каждом из 56 способов, которые мы можем заполнить синими шариками, то есть итоговый ответ будет $C_9^4 \cdot 56 = 7056$.

4. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько четырёхугольников с вершинами в этих точках?

Ответ: треугольников – 1200; четырёхугольников – 2970.

Решение. Будем для краткости называть 10 точек на первой прямой красными, а 12 точек на второй прямой – синими.

У треугольника может быть: 1) одна красная вершина и две синих; 2) одна синяя вершина и две красных. В первом случае мы выбираем красную вершину 10 способами, а синюю $C_{12}^2 = 12 \cdot 11 / 2 = 66$ способами. Во втором случае мы выбираем синюю вершину 12 способами, а красную – $C_{10}^2 = 45$ способами. Всего треугольников получается $10 \cdot 66 + 12 \cdot 45 = 1200$.

У четырёхугольника лишь одна возможность: две красные вершины и две синие. Число четырёхугольников получается равным $C_{10}^2 \cdot C_{12}^2 = 45 \cdot 66 = 2970$.

2 Теория вероятности

2.1 Базовая вероятность

Базовая формула для вероятности: $P = \frac{\text{Количество хороших исходов}}{\text{Количество всех исходов}}$.

Применяется часто как дополнение к стандартной задаче по комбинаторике на подсчёт. Полезно помнить определения и формулы C_n^k – количества способов выбрать из n элементов k без учёта порядка. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, однако в задачах бывает разрешено оставить большую C -шку, если она одна и легко не доводится до числового выражения. Всевозможные длинные суммы «цешек» (когда присутствует многоточие) обычно нуждаются в упрощении и не принимаются как окончательный ответ.

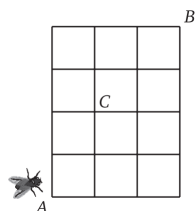
В качестве примера рассмотрим две задачи:

5. В городе, где живёт Рассеянный Учёный, телефонные номера состоят из семи цифр. Учёный легко запоминает телефонный номер, если этот номер — палиндром, (то есть он одинаково читается слева направо и справа налево). Например, номер 443 53 44 Учёный запоминает легко, а номер 372 36 27 — с трудом. Найдите вероятность того, что телефонный номер нового случайного знакомого Учёный запомнит легко.

Ответ: 0,1.

Решение. Заметим, что палиндром определяется однозначно по первым четырём цифрам, так как «хвост» из них однозначно восстанавливается. Тогда положительных исходов у нас 10^4 , а всего исходов – 10^7 , то есть ответ будет $\frac{10^4}{10^7} = \frac{1}{1000} = 0,1\%$.

6. Муха ползёт по решётке 3×4 из точки A в точку B по линиям сетки только вправо и вверх (как указано на рисунке ниже).



а) Предположим, что муха в каждом узле случайно выбирает направление движения. Чему равна вероятность того, что муха пройдёт через точку C ?

б) Предположим, что муха равновероятно выбирает один из всех имеющихся маршрутов от A до B . Чему равна вероятность того, что муха выберет маршрут, проходящий через точку C ?

Ответ: а) $3/8$; б) $18/35$.

Решение. а) В качестве одного из подходов можно рассматривать поочерёдно шанс попадания в каждый узел – оказаться над A и справа от A мы можем с одинаковой вероятностью $1/2$, тогда на два вверх от A пойдём с вероятностью $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$, а окажемся справа сверху от A с вероятностью $1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 1/2$. Тогда в C мы будем с вероятностью $1/4 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 3/8$.

Другой подход – можем рассмотреть все пути длины 3 и убедиться, что их 8 штук, при этом ровно 3 из них проходят через C .

б) Здесь нам уже задано пространство элементарных событий, нужно просто посчитать. Всего маршрутов будет C_7^4 , так как всего шагов из A в B нужно сделать 7, из которых какие-то 4 должны

быть вертикальные, остальные – горизонтальные. Маршрутов от A до C , по аналогии, C_3^1 , от C до $B - C_4^2$, итоговый ответ будет $\frac{C_3^1 \cdot C_4^2}{C_7^4} = \frac{3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{18}{35}$.

Н.В. Как видно, ответы получились разные, поэтому **важно задавать пространство элементарных событий**, удовлетворяющее условию задачи.

2.2 Геометрическая вероятность

Формула для геометрической вероятности: $P = \frac{S_{\text{хорошая область}}}{S_{\text{вся область}}}$.

Применяется в задачах, где обсуждается, например, попадание в мишень или другую область. Много дополнительно рассуждать здесь не будем, разберём пример:

7. Буратино посадил в центре прямоугольного листа бумаги размером 20 см на 30 см круглую кляксу радиусом 1 см. Сразу после этого Буратино посадил ещё одну такую же кляксу, которая также целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы не соприкасаются.

Ответ: $1 - \frac{\pi}{126}$.

Решение. По условию, центр второй кляксы находится на расстоянии не менее 1 см от края листа, то есть, внутри прямоугольника 18×28 см. Рассмотрим событие A : «Кляксы соприкасаются». Для этого нужно, чтобы центр второй кляксы попал в круг радиусом 2 см с тем же центром, что и первая клякса (тогда расстояние между центрами будет не более 2 см, поэтому кляксы соприкоснутся). Вероятность этого события: $P(A) = \frac{S_{\text{круг}}}{S_{\text{пр-к}}} = \frac{4\pi}{18 \cdot 28} = \frac{\pi}{126}$. Нас интересует вероятность дополнения, она будет $1 - \frac{\pi}{126}$.

2.3 Условная вероятность

Условная вероятность есть вероятность события A при условии события B : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Определение. Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность одного из них (например, A) не зависит от наступления события B . Другими словами, $P(A) = P(A|B)$.

Хорошо можно увидеть полезность формулы на следующем примере:

8. В семье один из двух детей — мальчик. Какова вероятность того, что другой ребёнок — девочка?

9. В семье двое детей. Известно, что старший ребёнок — мальчик. Какова вероятность того, что второй ребёнок — девочка?

Решение. На первый взгляд кажется, что обе вероятности $1/2$. Однако не всё так просто. Во второй задаче действительно информация про старшего ребёнка никак не влияет на информацию про младшего, поэтому вероятность будет $1/2$. Однако в первой задаче, по сути, применив формулу мы увидим, что для события A = «в семье мальчик и девочка» и B = «в семье есть мальчик» увидим, что $P(B) = 3/4$, $P(A \cap B) = P(A) = 1/2$, поэтому $P(A|B) = 2/3$.

Так что не всегда в задаче интуитивный ответ является правильным!

10. В семье двое детей. Известно, что один из детей — мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребёнок — тоже мальчик?

Ответ: $13/27$.

Решение. Здесь снова ответ не $1/2$, хотя кажется, что день рождения мальчика в понедельник слабо влияет на вероятность другого ребёнка оказаться девочкой. Пусть событие A будет иметь смысл «в семье два мальчика», а событие B = «в семье есть мальчик, родившийся в понедельник».

$$P(B) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{7} - \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{7} - \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{27}{196}, \quad P(A \cap B) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{196}.$$

Чтобы получить итоговый ответ, достаточно второе полученное значение разделить на первое.